

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 26 martie 2016

A doua probă de evaluare pentru OBM 2016 şi OIM 2016

Soluţii

B5. Şirul de polinoame $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este definit recurent astfel: $P_1(x) = 2X$,
 $P_2(X) = 2 \cdot (X^2 + 1)$, $P_{n+2}(X) = 2X \cdot P_{n+1}(X) - (X^2 - 1) \cdot P_n(X)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 Determinaţi toate valorile $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care polinomul $X^2 + 1$ divide polinomul $P_n(X)$.

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $2X = (X + 1) + (X - 1)$, iar $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$, rezultă că $P_n(X) = (X + 1)^n + (X - 1)^n$. Avem

$$2X \cdot P_{n+1}(X) - (X^2 - 1) \cdot P_n(X) = [(X + 1) + (X - 1)] \cdot [(X + 1)^{n+1} + (X - 1)^{n+1}] - (X + 1)(X - 1) [(X + 1)^n + (X - 1)^n] = (X + 1)^{n+2} + (X - 1)^{n+2} = P_{n+2}(X).$$

Fie $n = 4k + r$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} P_n(X) &= (X + 1)^{4k+r} + (X - 1)^{4k+r} = (X + 1)^r \cdot [(X + 1)^4]^k + (X - 1)^r \cdot [(X - 1)^4]^k = \\ &= (X + 1)^r \cdot [(X^2 + 1)(X^2 + 4X + 5) - 4]^k + (X - 1)^r \cdot [(X^2 + 1)(X^2 - 4X + 5) - 4]^k = \\ &= (X^2 + 1) \cdot C_{n-2}(X) + H_r(X), \text{ unde } H_r(X) = (-4)^k \cdot [(X + 1)^r + (X - 1)^r]. \end{aligned}$$

Rezultă că $(X^2 + 1) \mid P_n(X) \Leftrightarrow (X^2 + 1) \mid H_r(X)$. Cum $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci obţinem succesiv:

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0(X) = (-4)^k \cdot 2;$$

$$r = 1 \quad \Rightarrow \quad H_1(X) = (-4)^k \cdot 2X;$$

$$r = 2 \quad \Rightarrow \quad H_2(X) = (-4)^k \cdot 2(X^2 + 1);$$

$$r = 3 \quad \Rightarrow \quad H_3(X) = (-4)^k \cdot 2(X^3 + 3X);$$

Rezultă că polinomul $X^2 + 1$ divide polinomul $P_n(X)$ pentru orice $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

B6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulțimea A conține toate numerele naturale scrise în sistemul zecimal care satisfac simultan condițiile:

- a) fiecare element al mulțimii A are n cifre;
- b) fiecare element din mulțimea A este divizibil prin 3;
- c) fiecare element al mulțimii A este scris doar cu cifre din mulțimea $X = \{ 3, 5, 7, 9 \}$.

Determinați cardinalul mulțimii A .

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\text{Card } X = 4$, rezultă că există 4^n numere naturale scrise în sistemul zecimal cu n cifre, fiecare număr fiind scris doar cu cifre din mulțimea X . Notăm prin D_n cardinalul mulțimii A , iar prin P_n cardinalul mulțimii, elementele căreia satisfac condițiile a) și c) din enunț, dar nu stisfac condiția b).

Avem $D_n + P_n = 4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ușor se determină că $D_1 = 2$, $P_1 = 2$. Numărul D_{n+1} poate fi calculat recurent astfel:

1. Fie $S \in A$. Dacă la numărul S se adaugă cifra 3, atunci obținem D_n numere. Dacă la numărul S se adaugă cifra 9, atunci obținem D_n numere. În total, $2D_n$ numere.
2. Fie T este un număr din mulțimea cu cardinalul P_n . Dacă T este de forma $3k + 1$, atunci prin adăugarea lui 5 obținem numere care trebuie să fie numărate în D_{n+1} . Dacă T este de forma $3k + 2$, atunci prin adăugarea lui 7 obținem numere care trebuie, la fel, să fie numărate în D_{n+1} . În total avem P_n numere.

Am obținut recurența $D_{n+1} = 2 \cdot D_n + P_n$. Din $D_n + P_n = 4^n$ rezultă $P_n = 4^n - D_n$ și $D_{n+1} - D_n = 4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

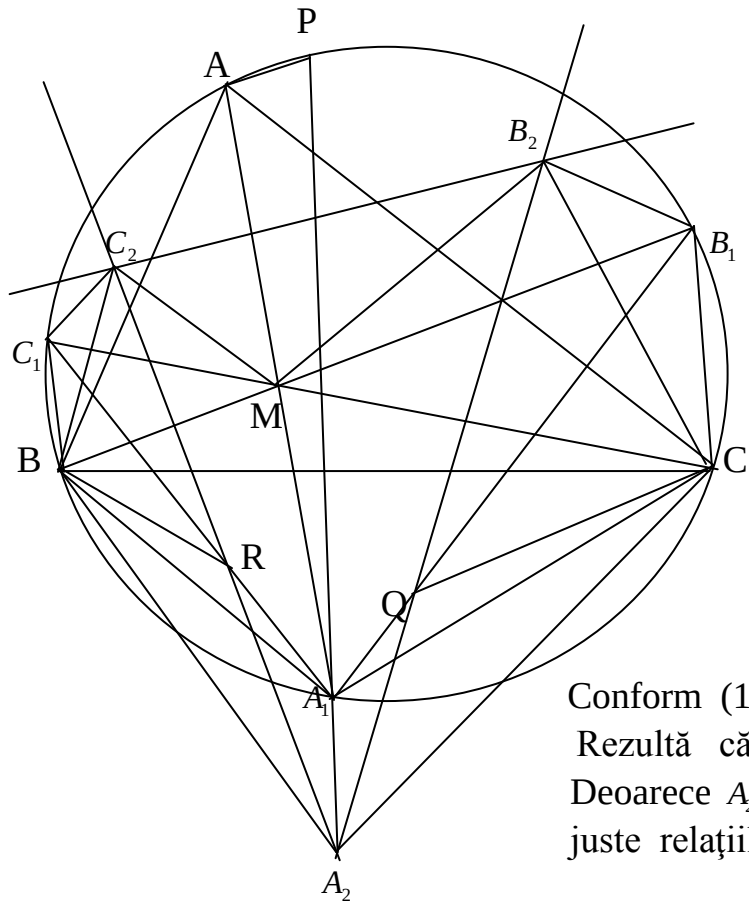
$$D_n = (D_n - D_{n-1}) + (D_{n-1} - D_{n-2}) + \dots + (D_2 - D_1) + 2 =$$

$$4^{n-1} + 4^{n-2} + 4 + 2 = \frac{4^n + 2}{3}.$$

Astfel, $D_n = \frac{4^n + 2}{3}.$

B7. Fie Ω cercul de centru O circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC . Punctul M , diferit de O , este situat arbitrar în interiorul triunghiului ABC astfel încât dreptele AM , BM și CM intersectează cercul Ω în punctele A_1 , B_1 și, respectiv C_1 . Fie A_2 , B_2 , C_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MBC , MCA și, respectiv MAB . Demonstrați că dreptele A_1A_2 , B_1B_2 și C_1C_2 sunt concurente.

Soluție. Fie $A_1C_1 \cap A_2C_2 = \{R\}$, $A_1B_1 \cap A_2B_2 = \{Q\}$, $A_1A_2 \cap \Omega = \{P\}$. Vom demonstra că $C_1C_2 \cap B_1B_2 = \{P\}$. Deoarece A_2B_2 este mediatoarea segmentului $[CM]$, sunt juste relațiile:



$$m(\angle CA_1B_1) = m(\angle CBB_1) = m(\angle CBM) = \frac{1}{2}m(\angle CA_2M) = m(\angle CA_2B_2).$$

$$\begin{aligned} m(\angle CA_1P) &= m(\angle PAC) \Rightarrow \\ m(\angle CA_1A_2) &= m(\angle CB_1P) \quad (1) \\ m(\angle BC_1A_1) &= m(\angle BAA_1) = m(\angle BAM) = \\ &= \frac{1}{2}m(\angle BC_2M) = m(\angle BC_2A_2). \end{aligned}$$

Deoarece $m(\angle BC_2R) = m(\angle BC_1R)$, iar $m(\angle CA_2Q) = m(\angle CA_1Q)$, atunci patrulateralele QCB_1B_2 și QCA_2A_1 sunt inscriptibile.

$$\text{Avem } m(\angle CA_1A_2) = m(\angle CQA_2) = m(\angle CB_1B_2).$$

Conform (1) obținem $m(\angle CA_1A_2) = m(\angle CB_1P) = m(\angle CB_1B_2)$.

Rezultă că $P \in B_1B_2$.

Deoarece A_2C_2 este mediatoarea segmentului $[BM]$, sunt juste relațiile:

$$m(\angle BA_1C_1) = m(\angle BCC_1) = m(\angle BCM) = \frac{1}{2}m(\angle BA_2M) = m(\angle BA_2C_2).$$

$$m(\angle BA_1P) = m(\angle PCB) \Rightarrow m(\angle BA_1A_2) = m(\angle BC_1P) \quad (2)$$

$$m(\angle BA_1C_1) = m(\angle BCC_1) = m(\angle BCM) = \frac{1}{2}m(\angle CB_2M) = m(\angle CB_2A_2).$$

Deoarece $m(\angle CB_2Q) = m(\angle CB_1Q)$, iar $m(\angle BA_2R) = m(\angle BA_1R)$, atunci patrulateralele RBC_1C_2 și RBA_2A_1 sunt inscriptibile. Avem $m(\angle BA_1A_2) = m(\angle BRA_2) = m(\angle BC_1C_2)$. Conform (2) obținem $m(\angle BA_1A_2) = m(\angle BC_1P) = m(\angle BC_1C_2)$. Rezultă că $P \in C_1C_2$.

Astfel, dreptele A_1A_2 , B_1B_2 și C_1C_2 sunt concurente într-un punct P care aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

B8. Fie date n ($n > 3$) bile de raze diferite. Pe fiecare bilă este scris câte un număr întreg. Să se determine cel mai mare număr natural d cu proprietatea că, oricare ar fi numerele scrise pe bile, oricând se pot găsi cel puțin patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .

Soluție. Evident, $d < n$. Într-adevăr, dacă luăm n bile, pe fiecare fiind scris numărul 1, atunci suma numerelor de pe orice set de bile nu depășește n și, prin urmare, pentru ca suma să se dividă cu d este necesar să fie $d \leq n$. Cazul $d = n$ este imposibil deoarece pentru aceste bile există doar un mod unic de selectare a bilelor (se iau toate bilele) astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .

Cazul $d = n - 1$ de asemenea este imposibil, deoarece dacă luăm n bile cu numerele scrise $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$, atunci pentru aceste bile există doar trei moduri de selectare a unui set de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d , și anume, seturile de bile: $\{a_1\}$, $\{a_2, a_3, \dots, a_n\}$ și $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Se știe că, fiind date m numere întregi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, oricând se poate selecta dintre ele un set nevid de numere, suma cărora se divide cu m (Lema lui Erdős). Pentru aceasta considerăm m sume: $b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots, b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m$. Sunt posibile două cazuri: A) aceste sume au resturi distincte modulo m (adică au toate resturile modulo m), și atunci o sumă se divide cu m , sau B) există două sume cu același rest modulo m și diferența lor (care este suma unui set de numere) se divide cu m .

Vom arăta că pentru $d = n - 2$ oricând se pot găsi patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .

Presupunem că avem setul de bile marcate cu numerele întregi scrise $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Dintre bilele $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}\}$ se poate selecta un set de bile T_1 cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$. Considerăm aici și în continuare că seturile selectate sunt minimale, adică sau ele conțin doar un element, sau ele nu conțin un alt set mai mic cu aceeași proprietate. Alegem $a_i \in T_1$. Dintre bilele $S \setminus \{a_i, a_{n-1}\}$ selectăm un set T_2 de bile cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$. Evident $T_1 \neq T_2$. Sunt posibile două cazuri.

1) $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Luăm $a_i \in T_1$ și $a_j \in T_2$. Dintre bilele $S \setminus \{a_i, a_j\}$ selectăm un set T_3 de bile cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$. Evident, seturile $T_1, T_2, T_1 \cup T_2$ și T_3 reprezintă patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .

2) $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Luăm $a_i \neq a_j$ cu $a_i \in T_1$ și $a_j \in T_2$. Analog, dintre bilele $S \setminus \{a_i, a_j\}$ selectăm un set T_3 de bile cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$. Evident $T_3 \neq T_1, T_3 \neq T_2$. Dacă am avea două dintre aceste seturi disjuncte (care nu au elemente comune), atunci am putea aplica cazul 1). Prin urmare, putem presupune că $T_p \cap T_q \neq \emptyset$ pentru $1 \leq p < q \leq 3$. Putem alege două elemente distincte a_k și a_l astfel încât $\{a_k, a_l\} \cap T_r \neq \emptyset$ pentru $1 \leq r \leq 3$. Atunci, dintre bilele $S \setminus \{a_k, a_l\}$ selectăm un set T_4 de bile cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$. Evident, $T_4 \neq T_r$ pentru $1 \leq r \leq 3$. Seturile distincte T_1, T_2, T_3 și T_4 sunt un exemplu de seturi solicitate.

Prin urmare, pentru $d = n - 2$ oricând se pot găsi cel puțin patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d . Astfel, valoarea $d = n - 2$ este cea mai mare posibilă. ■

Barem de corectare

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.

Problema	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
B 5.	Scrie relațiile Viete $2X = (X + 1) + (X - 1)$, $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$	1 punct
	Scrie soluția $P_n(X) = (X + 1)^n + (X - 1)^n$	1 punct
	Verifică soluția ecuației polinomiale recurente	1 punct
	Obține $(X + 1)^n = (X^2 + 1) \cdot C_{n-2}^1(X) + H_r^1(X)$	1 punct
	Obține $(X - 1)^n = (X^2 + 1) \cdot C_{n-2}^2(X) + H_r^2(X)$	1 punct
	Scrie $(X^2 + 1) \mid P_n(X) \Leftrightarrow (X^2 + 1) \mid H_r(X)$	1 punct
	Calculează polinoamele $H_r(X)$, $r = 0, 1, 2, 3$ și găsește valorile $n = 4k + 2$, $k \in N$.	1 punct
	TOTAL	7 puncte
B 6.	Dacă $Card X = 4$, rezultă că există 4^n numere naturale scrise în sistemul zecimal cu n cifre, fiecare număr fiind scris doar cu cifre din mulțimea X .	1 punct
	Scrie $D_n + P_n = 4^n$, $n \in N^*$ cu $D_1 = 2$, $P_1 = 2$.	1 punct
	Arată că numărul D_{n+1} este o sumă de 2 termeni, primul fiind $2D_n$	1 punct
	Arată că numărul D_{n+1} este o sumă de 2 termeni, al doilea fiind P_n	1 punct
	Obține recurența $D_{n+1} = 2 \cdot D_n + P_n$.	1 punct
	Obține recurența $D_{n+1} - D_n = 4^n$, $n \in N^*$.	1 punct
	Calculează $Card A = D_n = \frac{4^n + 2}{3}$.	1 punct
	TOTAL	7 puncte
B 7.	Dacă $A_1A_2 \cap \Omega = \{P\}$, afirmă că $C_1C_2 \cap B_1B_2 = \{P\}$.	1 punct
	Demonstrează egalitățile $m(\angle CA_1B_1) = m(\angle CBB_1) = m(\angle CBM) = \frac{1}{2}m(\angle CA_2M) = m(\angle CA_2B_2)$.	1 punct
	Demonstrează $m(\angle CA_1A_2) = m(\angle CB_1P)$ (1)	1 punct
	Demonstrează că patrulatele QCB_1B_2 și QCA_2A_1 sunt inscriptibile cu $m(\angle CA_1A_2) = m(\angle CB_1P) = m(\angle CB_1B_2)$, cu concluzia $P \in B_1B_2$.	1 punct
	Demonstrează egalitățile $m(\angle BA_1C_1) = m(\angle BCC_1) = m(\angle BCM) = \frac{1}{2}m(\angle BA_2M) = m(\angle BA_2C_2)$.	1 punct
	Demonstrează $m(\angle BA_1A_2) = m(\angle BC_1P)$ (2)	1 punct

	Demonstrează că patrulateralele RBC_1C_2 și RBA_2A_1 sunt inscriptibile cu $m(\angle BA_1A_2) = m(\angle BC_1P) = m(\angle BC_1C_2)$ cu concluzia $P \in C_1C_2$.	1 punct
	<i>TOTAL</i>	<i>7 puncte</i>
B 8.	Arată că cazurile $d > n$, $d = n$, $d = n - 1$ sunt imposibile	1 punct
	Formulează lema lui Erdős: fiind date m numere întregi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, oricând se poate selecta dintre ele un set nevid de numere, suma cărora se divide cu m	1 punct
	Din setul de bile marcate cu numerele întregi scrise $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ arată cum pot fi selectate seturile T_1, T_2 , $T_1 \neq T_2$, ambele cu suma numerelor divizibilă prin $n - 2$.	2 puncte
	În cazul $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ arată patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .	1 punct
	În cazul $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ arată patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .	1 punct
	Concluzia că pentru $d = n - 2$ oricând se pot găsi patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .	1 punct
	<i>TOTAL</i>	<i>7 puncte</i>