

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 27 martie 2016

A treia probă de evaluare pentru OBM 2016 şi OIM 2016

Soluţii

B9. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Determinaţi cea mai mică valoare numerică posibilă a expresiei

$$P = (1 + \cos \alpha) \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) + (1 + \sin \alpha) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$$

Soluţie. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$t = \sin \alpha + \cos \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \in (1, \sqrt{2}], \text{ iar } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Pentru expresia P obţinem reprezentările exprimate în variabila α

$$P = 2 + \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$2 + \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

şi reprezentarea exprimată în variabila t

$$P = 2 + t + \frac{2 \cdot (t + 1)}{t^2 - 1} = 2 + t + \frac{2}{t - 1}.$$

Fie funcţia $f : (1, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = 2 + t + \frac{2}{t - 1}$. Cum $f'(t) = 1 - \frac{2}{(t - 1)^2} < 0$ rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \sqrt{2}]$. Avem

$$f(t) \geq f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2} \text{ şi } t = \sqrt{2} \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Astfel, } \min P = 4 + 3\sqrt{2}.$$

B10. Fie $A_1A_2...A_{14}$ un poligon regulat cu 14 laturi. Demonstrați că dreptele A_1A_3 , A_5A_{11} și A_6A_9 sunt concurente.

Soluție. Fără a pierde din generalitate putem considera raza cercului circumscris poligonului regulat $A_1A_2...A_{14}$ egală cu 1, astfel încât vârfurile poligonului au afixele $A_k(z^{k-1})$, $k=1,2,...,14$, unde $z = \cos \frac{2\pi}{14} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7} + i \cdot \sin \frac{\pi}{7}$.

Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ cu $|a|=|b|=|c|=|d|=1$. Vom demonstra că afixul z_0 al punctului de intersecție al dreptelor AB și CD este egal cu

$$z_0 = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}. \quad (1)$$

Fie $P(z_0) \in AB$. Atunci $\frac{z_0 - a}{b - a} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}$. Dacă înlocuim $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, atunci obținem $z_0 = a + b - ab\bar{z}_0$. Deoarece $P(z_0) \in CD$, analogic obținem $z_0 = c + d - cd\bar{z}_0$. Prin excluderea lui $\bar{z}_0$ obținem formula (1).

Fie $A_1A_3 \cap A_5A_{11} = \{W_1(w_1)\}$. Cum $A_1(1)$, $A_3(z^2)$, $A_5(z^4)$, $A_{11}(z^{10})$, prin aplicarea formulei (1) obținem

$$w_1 = \frac{1 + z^2 - z^6 - z^{12}}{1 - z^2}.$$

Fie $A_1A_3 \cap A_6A_9 = \{W_2(w_2)\}$. Cum $A_1(1)$, $A_3(z^2)$, $A_6(z^5)$, $A_9(z^8)$, prin aplicarea formulei (1) obținem

$$w_2 = \frac{1 + z^2 - z^8 - z^{11}}{1 - z^3}.$$

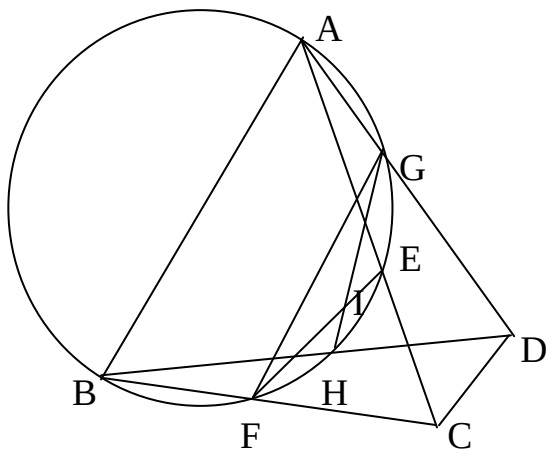
Cum $z^7 = -1$ și $z \neq 1$, atunci egalitatea $w_1 = w_2$ este echivalentă cu egalitatea

$$(1 + z + z^2) \cdot (1 + z^2 - z^6 - z^{12}) = (1 + z) \cdot (1 + z^2 - z^8 - z^{11}) \Leftrightarrow z + z^2 + z^3 = z + z^2 + z^3.$$

Rezultă că dreptele A_1A_3 , A_5A_{11} și A_6A_9 sunt concurente.

B11. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Cercul de diametru AB intersectează dreptele CA , CB , DA și DB în punctele E , F , G și, respectiv H (toate diferite de A și B). Dreptele EF și GH se intersectează în punctul I . Demonstrați că bisectoarea unghiului GIF și dreapta CD sunt perpendiculare.

Soluție. Deoarece patrulaterul $ABFG$ și $ABCD$ sunt inscriptibile, atunci au relațiile:



$$m(\angle DCF) + m(\angle GFC) = m(\angle DCB) + m(\angle GFC) =$$

$$m(\angle DCB) + 180^\circ - m(\angle BFG) = m(\angle DCB) +$$

$$m(\angle BAG) = m(\angle DCB) + m(\angle BAD) = 180^\circ.$$

Rezultă că $DC \parallel FG$. Vom arăta că triunghiul GIF este isoscel cu $GI = FI$. Avem

$$m(\angle FGI) = m(\angle FGH) = m(\angle FBH) = m(\angle CBD) = m(\angle DAC) =$$

$$m(\angle GAE) = m(\angle GFE) = m(\angle GFI).$$

Fie K mijlocul laturii $[FG]$. Atunci $KI \perp FG$, $m(\angle GIK) = m(\angle FIK)$. Rezultă că KI este bisectoarea unghiului GIF . Cum $DC \parallel FG$ și $KI \perp FG$, rezultă că $KI \perp CD$.

B12. În plan sunt date 2016 cercuri distincte, toate fiind de rază 1. Să se arate că dintre ele oricând pot fi selectate 27 de cercuri astfel încât: sau oricare două cercuri selectate se intersectează între ele, sau nicio pereche dintre cercurile selectate nu se intersectează între ele.

Soluție. Presupunem că nu putem selecta 27 de cercuri dintre cele date astfel încât oricare două cercuri selectate se intersectează între ele.

Luăm o axă de coordonate în plan care nu este perpendiculară pe niciun segment care unește centrele a oricăror două cercuri dintre cele 2016 cercuri date. Prin urmare, toate proiecțiile centrelor cercurilor pe această dreaptă sunt distincte. Notăm cercurile cu $C_1, C_2, \dots, C_{2016}$ în ordinea crescătoare a coordonatelor proiecțiilor centrelor lor pe axa menționată.

Vom arăta în continuare că fiecare cerc C_i ($i > 1$) poate intresa cel mult 75 de cercuri dintre cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$. Menționăm că centrele cercurilor $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ se află mai la stânga (în raport cu axa de coordonate) de centrul cercului C_i .

Notăm cu D_i discul de rază 2 cu același centru ca și C_i . Pentru fiecare disc D_i divizăm semidiscul lui din stânga (în raport cu axa de coordonate) în trei sectoare de 60° fiecare. Menționăm că oricare două cercuri de rază 1 cu centrele într-un astfel de sector se intersectează. Conform presupunerii anterioare, fiecare sector poate conține cel mult 25 de centre ale cercurilor $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ (în caz contrar printre cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_i$ se vor găsi 27 de cercuri cu centrele în acest sector, și care, prin urmare, se vor intersecta oricare două între ele, ceea ce contrazice presupunerea). Rezultă că semidiscul din stânga al discului D_i conține cel mult 75 de centre ale cercurilor $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$. Ca urmare, fiecare cerc C_i ($i > 1$) poate intresa cel mult 75 de cercuri dintre cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$.

Colorăm consecutiv cele 2016 cercuri $C_1, C_2, \dots, C_{2016}$ astfel încât oricare două cercuri care se intersectează să fie de culori diferite, utilizând cel mult 76 de culori. Într-adevăr, dacă avem deja colorate cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ (respectând condiția de colorare diferită și cu cel mult 76 de culori), atunci, cercul C_i , care poate intersecta cel mult 75 de cercuri dintre cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$, la rândul său poate fi colorat cu una dintre cele 76 de culori astfel încât oricare două dintre cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_i$ care se intersectează să fie de culori diferite.

Astfel, putem colora cele 2016 cercuri, utilizând cel mult 76 de culori. Deoarece $\frac{2016}{76} > 26$, conform principiului Dirichlet, rezultă că există cel puțin 27 de cercuri de aceeași culoare. Oricare două cercuri dintre acestea nu se intersectează (în caz contrar ele trebuie să fie de culori diferite).

Prin urmare, dacă nu putem selecta 27 de cercuri dintre cele date astfel încât oricare două cercuri selectate se intersectează între ele, atunci oricând putem selecta 27 de cercuri astfel încât nicio pereche dintre cercurile selectate nu se intersectează între ele. ■

Barem de corectare

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.

Problema	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
B 9.	Obține $P = 2 + \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$	1 punct
	Definește funcția $f : (1, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2 + t + \frac{2}{t-1}$, unde $t = \sin \alpha + \cos \alpha$ (1 p. - pentru $D(f) = (1, \sqrt{2}]$, 1 p. - pentru notația $t = \sin \alpha + \cos \alpha$ și $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2}$, 1 p. - pentru $f(t) = 2 + t + \frac{2}{t-1}$)	3 puncte
	Calculează $f'(t)$ și argumentează că $f'(t) < 0$ oricare ar fi $t \in (1, \sqrt{2}]$	2 puncte
	Obține $\min P = 4 + 3\sqrt{2}$	1 punct
	TOTAL	7 puncte
B 10.	Determinarea măsurilor unghiurilor formate la intersecția dreptelor A_1A_3 , A_5A_{11} și A_6A_9 , două câte două respectiv	2 puncte
	Demonstrarea că punctele P și T coincid prin demonstrarea congruențelor a patru segmente: $A_1A_5 = A_5A_9 = A_5P = A_5T$, unde $A_6A_9 \cap A_5A_{11} = \{P\}$, $A_1A_3 \cap A_5A_{11} = \{T\}$	5 puncte
	TOTAL	7 puncte
B 11.	Obține relația $DC \parallel FG$	2 puncte
	Demonstrează că triunghiul GIF este isoscel cu $GI=FI$	3 puncte
	Pentru afirmația că dacă KI este bisectoarea unghiului GIF atunci $KI \perp FG$, unde K este mijlocul laturii FG	1 punct
	Pentru demonstrarea faptului că $KI \perp CD$	1 punct
	TOTAL	7 puncte
B 12.	Pentru aranjarea celor 2016 cercuri astfel încât proiecțiile centrelor cercurilor pe o dreaptă, care nu este perpendiculară pe niciun segment care unește centrele a oricăror două cercuri, sunt distincte și aranjate în ordinea crescătoare a coordonatelor proiecțiilor centrelor lor pe dreapta menționată.	1 punct
	Estimarea numărului de intersecții a cercului C_i cu cercurile $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ (în particular pentru idea cu estimarea numărului de intersecții pentru cercul C_i din punct de vedere geometric – 1 punct)	3 puncte
	Pentru aplicarea colorării și aplicarea principiului Dirichlet	2 puncte
	Pentru concluzia că există 27 de cercuri cu proprietatea cerută	1 punct
	TOTAL	7 puncte