

Soluţii

B1. Vom arăta că funcţia f este injectivă.

Fie $f(n_1) = f(n_2), (\forall) n_1, n_2 \in N^*$. Atunci avem $f(m \cdot f(n_1)) = f(m \cdot f(n_2)), (\forall) m \in N^*$. Conform egalităţii din enunţ obţinem $n_1 + f(2015m) = n_2 + f(2015m) \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Deci, funcţia f este injectivă.

Punem în egalitatea din enunţ $m = 2015$. Atunci $f(2015 \cdot f(n)) = n + f(2015^2), (\forall) n \in N^*$.

În egalitatea din enunţ înlocuim m cu $f(m)$:

$$f(f(m) \cdot f(n)) = n + f(2015 \cdot f(m)) = n + m + f(2015^2) = f(2015 \cdot f(m+n)), (\forall) m, n \in N^*.$$

Aplicând injectivitatea, obţinem: $f(m) \cdot f(n) = 2015 \cdot f(m+n), (\forall) m, n \in N^*$.

Pentru $m=1$ avem $f(1) \cdot f(n) = 2015 \cdot f(n+1), (\forall) n \in N^*$. Atunci

$$f(n+1) = \frac{f(1)}{2015} \cdot f(n) = \dots = \left(\frac{f(1)}{2015}\right)^n \cdot f(1) = 2015 \cdot \left(\frac{f(1)}{2015}\right)^{n+1} \Rightarrow f(n) = 2015 \cdot a^n, \text{ unde } a = \frac{f(1)}{2015}.$$

Înlocuim în egalitatea din enunţ: $2015 \cdot a^{m \cdot 2015 a^n} = n + 2015 \cdot a^{2015 m}$. Pentru $m = n = 1$ avem $2015 \cdot a^{f(1)} - 2015 \cdot a^{2015} = 1$, fals. Deci nu există funcţii cu proprietatea din enunţ.

B2. Cum $\triangle AEF$ este isoscel, atunci $AI \perp EF$, $FQ = QE$,

$$m(\text{arc}FP) = m(\text{arc}PE), \text{ unde}$$

$$(AI) \cap (\text{arc}EF) = \{P\},$$

$$AI \cap EF = \{Q\}.$$

Cum $m(\angle FDN) = m(\angle EDN)$ şi

$$m(\angle FDP) = m(\angle EDP) \Rightarrow$$

punctele D, N şi P sunt coliniare.

Avem:

1. $m(\angle IMC) = m(\angle MIB) + m(\angle MBI)$ - unghi exterior al $\triangle IMB$.

$$\begin{aligned} m(\angle IMC) &= \frac{1}{2} m(\angle BIC) + m(\angle MBI) = \frac{1}{2} \cdot [180^\circ - m(\angle IBC) - m(\angle ICB)] + m(\angle MBI) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[180^\circ - \frac{1}{2} m(\angle ABC) - \frac{1}{2} m(\angle ACB) \right] + \frac{1}{2} m(\angle ABC) = 90^\circ + \frac{1}{4} m(\angle ABC) - \frac{1}{4} m(\angle ACB). \end{aligned}$$

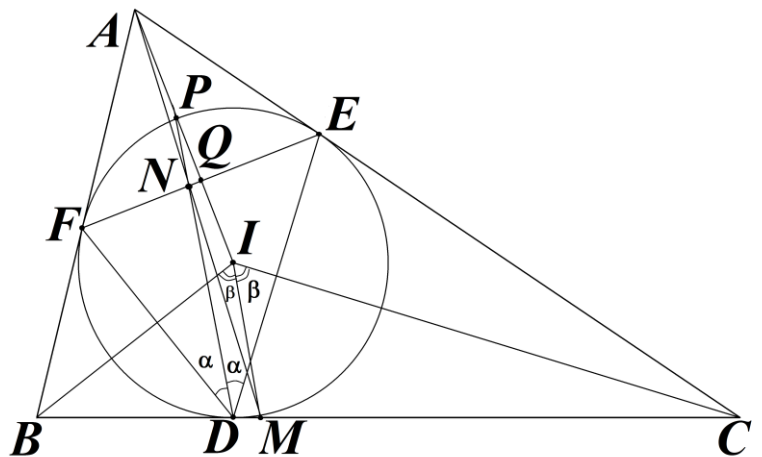
2. $m(\angle NDC) = m(\angle EDN) + m(\angle EDC) = \frac{1}{2} m(\angle EDF) + m(\angle EDC) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot [180^\circ - m(\angle FDB) - m(\angle EDC)] + m(\angle EDC) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [180^\circ - (90^\circ - m(\angle IBD)) - (90^\circ - m(\angle ICD))] + 90^\circ - m(\angle ICD) = \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} m(\angle IBD) - \frac{1}{2} m(\angle ICD) = 90^\circ + \frac{1}{4} m(\angle ABC) - \frac{1}{4} m(\angle ACB). \end{aligned}$$

Din 1. şi 2. rezultă că $m(\angle IMC) = m(\angle NDC) \Rightarrow IM \parallel DN \Rightarrow IM \parallel PN$.

Cum $ID = IP$ şi $MI \parallel DP \Rightarrow m(\angle MID) = m(\angle IDP) = m(\angle IPD) = m(\angle QPN)$, iar

$$m(\angle IDM) = m(\angle PQN) = 90^\circ. \text{ Rezultă că } \triangle IDM \sim \triangle PQN. \text{ Atunci } \frac{IM}{PN} = \frac{DI}{PQ} \Leftrightarrow \frac{IM}{PN} = \frac{PI}{QP}.$$



Dar $EQ \perp AI$, $IE = IP \Rightarrow IQ \cdot IA = IE^2 = IP^2$ (teorema catetei în $\triangle AIE$).

$$\text{Avem } \frac{QP}{IP} = \frac{IP - IQ}{IP} = 1 - \frac{IQ}{IP} = 1 - \frac{IP}{IA} = \frac{PA}{IA} \Rightarrow \frac{IP}{QP} = \frac{IA}{PA} \Rightarrow \frac{IM}{PN} = \frac{IA}{PA}.$$

Din $PN \parallel MI$ și $m(\angle APN) = m(\angle AIM)$ rezultă că punctele A, N și M sunt coliniare.

B3. Din enunț rezultă că $E \geq 0$. Să arătăm că $E > 0$.

Dacă $E = 0$, atunci $y = (\sqrt{2p} - \sqrt{x})^2 = 2p + x - 2\sqrt{2px}$. Cum $x, y, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2px$ este pătrat perfect. Fie $2px = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $p \mid k$ și $2 \mid k$, de unde $k = 2pt$, $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = 2pt^2 \geq 2p$, contradicție, deoarece $x < 2p$. Astfel, $E > 0$ și $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2p}$.

Notăm $\left[2\sqrt{xy} \right] = z - 1$. Atunci $z - 1 \leq 2\sqrt{xy} < z$. Avem:

$$a) z^2 > 4xy \Rightarrow z^2 - 1 \geq 4xy \Rightarrow 2\sqrt{xy} \leq \sqrt{z^2 - 1};$$

$$b) x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 < 2p \Rightarrow x + y < 2p - 2\sqrt{xy} \leq 2p - (z - 1) = 1 + 2p - z \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y < 2p + 1 - z \Rightarrow x + y \leq 2p - z.$$

$$c) (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{xy} \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 < 2p \Rightarrow 2\sqrt{xy} < p \Rightarrow z \leq p.$$

$$\text{Din a), b) și c) obținem } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \leq 2p - z + \sqrt{z^2 - 1} = 2p - (z - \sqrt{z^2 - 1}) = \\ = 2p - \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \leq 2p - \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} = 2p - (p - \sqrt{p^2 - 1}) = p + \sqrt{p^2 - 1} = \left(\sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}} \right)^2$$

Astfel $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}}$. Să arătăm că ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}}$ are soluții în numere întregi pozitive în condițiile estimărilor efectuate. Într-adevăr, din sistemul de egalități avem:

$$\begin{cases} z^2 - 1 = 4xy, \\ x + y = 2p - z, \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy = p^2 - 1, \\ x + y = p, \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+1}{2} \in \mathbb{N}^*, \\ y = \frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Expresia E va avea cea mai mică valoare posibilă dacă și numai dacă expresia $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ va avea cea mai mare valoare posibilă pentru $x, y \in \mathbb{N}^*$, egală cu $\sqrt{\frac{p+1}{2}} + \sqrt{\frac{p-1}{2}}$.

$$\text{Astfel, } \min E = \sqrt{2p} - \sqrt{\frac{p+1}{2}} - \sqrt{\frac{p-1}{2}}.$$

B4. 1) Vom arăta mai întâi că dacă pe o dreaptă sunt luate n puncte distincte $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, în această ordine, atunci numărul $f(n, k)$ al submulțimilor de k puncte ale mulțimii X , care nu conțin puncte vecine, este egal cu $f(n, k) = C_{n-k+1}^k$, unde $k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Fie mulțimea $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{n-k+1}\}$ din $n - k + 1$ elemente. Oricărei submulțimi de k puncte $U = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$), a mulțimii X , care nu conține puncte vecine, îi punem în corespondență o submulțime de k elemente $V = \{y_{i_1}, y_{i_2-1}, y_{i_3-2}, \dots, y_{i_k-k+1}\}$ a mulțimii Y .

Relația construită este bijectivă. Aceasta rezultă din faptul că dacă $V = \{y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, \dots, y_{i_k}\}$, ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$), este o submulțime de k elemente a mulțimii Y , atunci

$U = \{x_{i_1}, x_{i_2+1}, x_{i_3+2}, \dots, x_{i_k+k-1}\}$ este o submulțime de k puncte a mulțimii X , care nu conține puncte vecine. Prin urmare $f(n, k) = C_{n-k+1}^k$.

2) Putem considera vârfurile poligonului amplasate pe un cerc. Evident pentru $k > \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ o astfel de colorare este imposibilă.

Presupunem $k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. Vom arăta că dacă punctele mulțimii $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sunt amplasate pe un cerc în această ordine, atunci numărul $g(n, k)$ al submulțimilor de k puncte ale mulțimii X , care nu conțin puncte vecine, verifică relația $g(n, k) = f(n-1, k) + f(n-3, k-1)$.

Este lesne de văzut că o submulțime de k puncte a mulțimii X , care nu conține puncte vecine și care nu conține punctul x_1 , poate fi considerată totodată și ca o submulțime de k elemente a mulțimii $X \setminus \{x_1\}$ fără puncte vecine, dacă punctele mulțimii $X \setminus \{x_1\}$ sunt reamplasate pe o dreaptă în ordinea $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$, păstrând vecinătatea punctelor din mulțimea X . Se verifică ușor și veridicitatea afirmației reciproce. Prin urmare, numărul de astfel de submulțimi este $f(n-1, k)$.

Pe de altă parte, numărul submulțimilor de k puncte ale mulțimii X , care nu conțin puncte vecine și care conțin elementul x_1 , este egal cu numărul submulțimilor de $k-1$ puncte ale mulțimii $X \setminus \{x_1, x_2, x_n\}$ fără puncte vecine, dacă punctele mulțimii $X \setminus \{x_1, x_2, x_n\}$ sunt reamplasate pe o dreaptă în ordinea $\{x_3, x_4, \dots, x_{n-1}\}$, păstrând vecinătatea punctelor din mulțimea X . Acest număr este egal cu $f(n-3, k-1)$.

Astfel, $g(n, k) = f(n-1, k) + f(n-3, k-1)$.

Prin aplicarea formulei de la 1) avem

$$g(n, k) = C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k.$$

Răspuns: 0 pentru $k > \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$; $\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$ pentru $k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.