

A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 28 martie 2015

A doua probă de evaluare pentru OBM2015 şi OIM2015

Soluţii

B5. Dacă $0 < c < \frac{\pi}{2}$, atunci $0 < \sin c < 1$, $0 < \cos c < 1$, $0 < \sin 2c \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2 \sin c \cdot \cos c \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin c \cdot \cos c} \geq 2 > \sqrt[11]{2015}$, deoarece $2^{11} = 2048 > 2015$.

Presupunem că ambele numere a şi b nu depăşesc $\sqrt[11]{2015}$, adică

$$\begin{cases} a \leq \sqrt[11]{2015}, \\ b \leq \sqrt[11]{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\sin c}\right)^{\frac{1}{\cos^2 c}} \leq \sqrt[11]{2015}, \\ \left(\frac{1}{\cos c}\right)^{\frac{1}{\sin^2 c}} \leq \sqrt[11]{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{\sin c} \leq 2015^{\frac{\cos^2 c}{11}}, \\ 0 < \frac{1}{\cos c} \leq 2015^{\frac{\sin^2 c}{11}}. \end{cases}$$

Rezultă că $2 \leq \frac{1}{\sin c \cdot \cos c} \leq 2015^{\frac{\cos^2 c + \sin^2 c}{11}} = 2015^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{2015}$, contradicţie.

Astfel, cel puţin unul dintre numerele a sau b este mai mare decât $\sqrt[11]{2015}$.

B6. Inegalitatea din enunţ se scrie astfel:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 9. \quad (1)$$

Avem $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b \Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$ - inegalitate justă
 $(\forall) a, b \in \mathbb{R}_+$. Analogic $b^3 + c^3 \geq bc^2 + b^2c$ şi $c^3 + a^3 \geq ca^2 + c^2a$. Atunci prin sumare parte cu parte
 obţinem inegalitatea: $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + \frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b(c^2 + a^2)}{2}. \quad (2)$$

Pentru a demonstra (1), adunăm la ambele părţi ale inegalităţii juste (2) expresia

$$\begin{aligned} & \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \text{ şi obţinem } 2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq \\ & \geq a^3 + b^3 + c^3 + \frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq \\ & \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} + \left[\frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right] + \left[\frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \right] + \left[\frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \right] \geq \\ & \geq 3 + 2\sqrt{\frac{c(a^2 + b^2)}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}} + 2\sqrt{\frac{a(b^2 + c^2)}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2}} + 2\sqrt{\frac{b(c^2 + a^2)}{2} \cdot \frac{2ca}{c^2 + a^2}} = 9, \end{aligned}$$

deoarece $a \cdot b \cdot c = 1$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

B7. Fie $IE \cap JF = \{O\}$.

Din $m(\angle KFI) = m(\angle FCB) = 90^\circ - m(\angle ABC) =$

$= 90^\circ - m(\angle LJC) = m(\angle E JL)$,

$m(\angle IKF) = 180^\circ - m(\angle BKI) =$

$= 180^\circ - m(\angle BAC) = 180^\circ - m(\angle JLC) =$

$= m(\angle ELJ) \Rightarrow \Delta KFI \sim \Delta LJE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KF}{LJ} = \frac{FI}{EJ}$. Din $m(\angle IFO) = m(\angle EJO)$

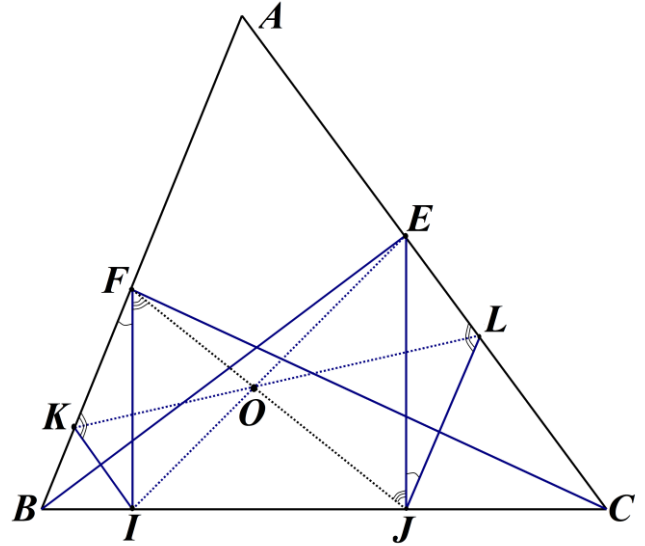
și $m(\angle FOI) = m(\angle JOE) \Rightarrow$

$\Delta FOI \sim \Delta JOE \Rightarrow m(\angle KFO) = m(\angle LJO)$.

Cum $\frac{FO}{OJ} = \frac{FI}{JE} \Rightarrow \Delta KFO \sim \Delta LJO \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle FOK) = m(\angle JOL) \Rightarrow$

punctele K, O, L sunt coliniare $\Leftrightarrow$ dreptele JF, IE, KL sunt concurente.



B8. Menționăm că submulțimea $S = \{1\}$ este o submulțime perfectă minimală. Ca urmare, orice altă submulțime perfectă minimală nu conține numărul 1.

Fie f_n numărul tuturor submulțimilor perfecte minimale ale mulțimii $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Evident $f_1 = 1$ și $f_2 = 1$.

Presupunem că $n > 2$. Numărul submulțimilor perfecte minimale ale mulțimii A_n , care nu conțin numărul n , este egal cu f_{n-1} .

Pentru orice submulțime perfectă minimală S a mulțimii A_n , care conține numărul n , efectuăm următoarea procedură: eliminăm numărul n din S , iar din toate elementele rămase scădem 1 (toate elementele mulțimii inițiale S erau mai mari decât 1). Astfel obținem o submulțime perfectă minimală a mulțimii $A_{n-2} = \{1, 2, \dots, n-2\}$. Rezultă că numărul submulțimilor perfecte minimale ale mulțimii A_n , care conțin numărul n , este egal cu f_{n-2} . Prin urmare, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, iar $f_1 = f_2 = 1$.

Rezultă că numerele f_n sunt numerele Fibonacci și

$$f_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$