

A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 martie 2015

A treia probă de evaluare pentru OBM2015 şi OIM2015

Soluţii

B9. Pentru orice $x \geq 0$ avem $(P(x)-10)^2 + 13 = P(x^2 + 3)$ (1).

Pentru $x = 2015$ din (1) obţinem

$$P(2015^2 + 3) = [P(2015) - 10]^2 + 13 = (2025 - 10)^2 + 13 = (2015^2 + 3) + 10.$$

Fie $x_1 = 2015^2 + 3$, atunci $P(x_1) = x_1 + 10$. Dacă $x_2 = x_1^2 + 3$, atunci

$$P(x_2) = P(x_1^2 + 3) = [P(x_1) - 10]^2 + 13 = (x_1 + 10 - 10)^2 + 13 = x_1^2 + 13 = (x_1^2 + 3) + 10 = x_2 + 10.$$

Fie $x_0 = 2015$, iar $x_n = x_{n-1}^2 + 3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Avem $x_n - x_{n-1} = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 3 > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător, adică $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$

Prin aplicarea inducţiei matematice se arată că $P(x_n) = x_n + 10$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $Q(X) = P(X) - (X + 10)$. Cum $Q(x_n) = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow Q(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow P(X) = X + 10$.

Efectuăm verificarea: $P(2015) = 2025$, $\sqrt{P(x^2 + 3) - 13} = \sqrt{x^2 + 3 + 10 - 13} = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

$(\forall) x \in [0; +\infty)$, $P(x) - 10 = (x + 10) - 10 = x$. Astfel $P(X) = X + 10$.

B10. Fie $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \Rightarrow z^7 = 1 \Leftrightarrow z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z = -1.$$

$$\text{Notăm } S = z + z^2 + z^4 = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) + i \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6},$$

$$T = z^3 + z^5 + z^6 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}.$$

Avem $S + T = -1$, iar $S \cdot T = 2 + \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 2$. Rezultă că S şi T sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 + t + 2 = 0$.

$$\text{Avem } S = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad T = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ de unde obţinem } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad (1) \quad \text{şi}$$

$$\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (2). \quad \text{Din (2) rezultă: } \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) + \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right) - \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos \frac{8\pi}{7} \right) - \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \left(-1 - 2 \cos \frac{8\pi}{7} \right) - 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \left(1 + \cos \frac{8\pi}{7} \right) - 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 2 \cdot \frac{\sin \frac{3\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{7}} \cdot 2 \cos^2 \frac{4\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} + 4 \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} + 2 \cdot \sin \frac{8\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

unde $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

Din $MN \parallel BC$ avem $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{p_1}{p} \Rightarrow c = \frac{p}{p_1} \cdot AM$, $b = \frac{p}{p_1} \cdot AN$. Atunci din (1) rezultă

$$l_a = \frac{2 \cdot \frac{p}{p_1} \cdot AM \cdot \frac{p}{p_1} AN}{\frac{p}{p_1} (AM + AN)} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{p_1} \cdot l_1. \text{ Analogic obținem } l_b = \frac{p}{p_2} \cdot l_2, \quad l_c = \frac{p}{p_3} \cdot l_3.$$

Prin adunarea rapoartelor avem $\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} = p \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right)$.

Fie $p_1 = \frac{1}{2}P(\Delta AMN)$. Cum patrulaterul $BMNC$ este circumscriptibil, atunci

$$MN + a = BM + NC = c - AM + b - AN, \text{ de unde } P(\triangle AMN) = b + c - a, \text{ iar } p_1 = \frac{b + c - a}{2} = p - a.$$

Analogic, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$. Atunci $p_1 + p_2 + p_3 = p$.

Astfel, avem $\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} = (p_1 + p_2 + p_3) \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) \geq 9$.

Conform inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz obținem

$$\left(\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3}\right)^2 \leq (l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \cdot \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right). \quad (2)$$

Din (1) și $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A) = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$ obținem

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}}. \text{ Atunci } l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot p(p-a) \leq p(p-a), \text{ deoarece } 4bc \leq (b+c)^2.$$

Astfel $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p(p-a + p-b + p-c) = p^2$.

Din (2) avem $81 \leq \left(\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} \right)^2 \leq (l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \cdot \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right) \leq p^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right)$, de unde rezultă că

$$\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \geq \frac{81}{p^2}.$$

B12. Fie $V = \{j, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mulțimea tuturor vectorilor cu $(n+1)$ componente din mulțimea Y , astfel încât $j \geq a_i$ pentru orice $i, 1 \leq i \leq n$.

Pentru orice i , $1 \leq i \leq n$, notăm $X_i = X \setminus \{i\}$. Vom pune în corespondență fiecărei funcții f cu proprietatea cerută un vector din V după regula: $f \mapsto \{f(X), f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)\}$.

Aplicația este corectă, adică obținem un vector din V , deoarece $f(X_i) = f(X_i \cap X) \leq f(X)$, $1 \leq i \leq n$.

Această corespondență este inversabilă, și anume, fiecărui vector dat $v = \{j, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ din V îi vom pune în corespondență o funcție f , definită astfel: $f(X) = j$, iar pentru orice submulțime $T \subset X$,

$T \neq X$, definim $f(T) = a_p$, unde $p = \min\{i \mid i \neq T\}$ (acest minim există, deoarece $T \neq X$). Se verifică lesne că $f(A \cap B) = \min\{f(A), f(B)\}$. De asemenea se verifică lesne că funcției construite f îi corespunde vectorul dat v . Astfel, corespondența construită este bijectivă.

Prin urmare, numărul funcțiilor cu proprietatea cerută este egal cu cardinalul mulțimii V ,

$$\text{card } V = \sum_{j=1}^k j^n$$

(pentru fiecare $j \in Y$ există j valori posibile pentru fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$, astfel încât vectorul $\{j, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ să aparțină V).