

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 29 februarie 2016

Prima probă de evaluare pentru OBM 2016 și OIM 2016

B1. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac egalitatea $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$.

Aflați cea mai mică valoare numerică posibilă a expresiei

$$E = a + b + c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

B2. La împărțirea numărului prim p la patru se obține restul egal cu unu.

Calculați suma $S = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left[\frac{2k^2}{p} \right] - 2 \cdot \left[\frac{k^2}{p} \right] \right)$, unde prin $[x]$ s-a notat partea

întreagă a numărului real x .

B3. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$. Punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile acestui triunghi (BC), (CA) și (AB) sunt M , N și, respectiv P , iar M_1 , N_1 , P_1 sunt simetricele punctelor M , N , P în raport cu mijlocurile laturilor (BC), (CA) și, respectiv (AB). Calculați valoarea numerică a raportului $\frac{AO_1 + BO_1}{AB}$, unde O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului $M_1N_1P_1$.

B4. Să se arate că pentru orice număr prim p și orice număr natural $n \geq 2$ există un număr natural k astfel încât scrierea zecimală a numărului p^k conține n cifre consecutive identice.

Timp alocat - 4,5 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинев, 29 февраля 2016 года

Первый отборочный тур для БМО 2016 и ММО 2016

В1. Действительные положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству

$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$. Найдите наименьшее возможное числовое значение

выражения $E = a + b + c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$.

В2. При делении простого числа p на четыре остаток равен единице.

Вычислите сумму $S = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left[\frac{2k^2}{p} \right] - 2 \cdot \left[\frac{k^2}{p} \right] \right)$, где через $[x]$ обозначена

целая часть действительного числа x .

В3. Задан треугольник ABC с прямым углом C . Вписанная окружность данного треугольника касается сторон (BC) , (CA) и (AB) в точках M , N и P соответственно, а точки M_1, N_1, P_1 симметричны точкам M, N, P относительно середин сторон (BC) , (CA) и (AB) соответственно. Вычислите числовое значение отношения $\frac{AO_1 + BO_1}{AB}$, где O_1 - центр описанной окружности треугольника $M_1N_1P_1$.

В4. Докажите, что для любого простого числа p и любого натурального числа $n \geq 2$ существует натуральное число k такое, что десятичная запись числа p^k содержит n последовательных одинаковых цифр.

Время выполнения – 4,5 астрономических часа

Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!