

A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 28 martie 2015

A doua probă de evaluare pentru OBM2015 şi OIM2015

B5. Fie numerele

$$c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad a = \left(\frac{1}{\sin c}\right)^{\frac{1}{\cos^2 c}}, \quad b = \left(\frac{1}{\cos c}\right)^{\frac{1}{\sin^2 c}}.$$

Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele a sau b este mai mare decât $\sqrt[11]{2015}$.

B6. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac egalitatea $a \cdot b \cdot c = 1$.
Demonstraţi inegalitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} + \frac{b \cdot c}{b^2 + c^2} + \frac{c \cdot a}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

B7. În triunghiul ascuţitunghic ABC punctele E şi F sunt picioarele înălţimilor duse din vârfurile B şi, respectiv, C . Punctele I şi J sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor F şi, respectiv, E pe latura $[BC]$, iar punctele K şi L sunt situate pe laturile $[AB]$ şi, respectiv $[AC]$, astfel încât $IK \parallel AC$ şi $JL \parallel AB$. Demonstraţi că dreptele IE , JF şi KL sunt concurente.

B8. Fie numărul natural nenul n şi mulţimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Vom spune că o submulţime S a mulţimii A este *perfectă*, dacă cardinalul $\text{Card } S$ este un element din S . O submulţime perfectă S se numeşte *minimală*, dacă ea nu conţine nici o altă submulţime perfectă, diferită de S . Determinaţi numărul tuturor submulţimilor perfecte minimale ale mulţimii A .

Timp de lucru: 4 ore 30 minute.

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59 – ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 28 марта 2015 года

Второй отборочный тур для БМО2015 и ММО2015

В5. Пусть заданы числа

$$c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad a = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}, \quad b = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Покажите, что, по крайней мере, одно из чисел a или b больше, чем $\sqrt[11]{2015}$.

В6. Действительные положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a \cdot b \cdot c = 1$. Докажите неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} + \frac{b \cdot c}{b^2 + c^2} + \frac{c \cdot a}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

В7. В остроугольном треугольнике ABC точки E и F являются основаниями высот, проведенных из вершин B и C , соответственно. Точки I и J являются ортогональными проекциями точек F и, соответственно, E на сторону $[BC]$, а точки K и L расположены на сторонах $[AB]$ и $[AC]$ соответственно, так, что $IK \parallel AC$ и $JL \parallel AB$. Докажите, что прямые IE , JF и KL пересекаются в одной точке.

В8. Пусть задано натуральное ненулевое число n и множество $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Скажем, что подмножество S множества A является *совершенным*, если кардинал $\text{Card } S$ является элементом S . Совершенное подмножество S называется *минимальным*, если оно не содержит ни одного совершенного подмножества, отличного от S . Найти количество совершенных минимальных подмножеств множества A .

Время работы: 4 часа 30 минут

Каждая правильно решенная задача оценивается 7 очками.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!