

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 26 martie 2016

A doua probă de evaluare pentru OBM 2016 şi OIM 2016

B5. Şirul de polinoame $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este definit recurent astfel: $P_1(x) = 2X$, $P_2(X) = 2 \cdot (X^2 + 1)$, $P_{n+2}(X) = 2X \cdot P_{n+1}(X) - (X^2 - 1) \cdot P_n(X)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi toate valorile $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care polinomul $X^2 + 1$ divide polinomul $P_n(X)$.

B6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulţimea A conţine toate numerele naturale scrise în sistemul zecimal care satisfac simultan condiţiile:

- a) fiecare element al mulţimii A are n cifre;
- b) fiecare element din mulţimea A este divizibil prin 3;
- c) fiecare element al mulţimii A este scris doar cu cifre din mulţimea $X = \{3, 5, 7, 9\}$.

Determinaţi cardinalul mulţimii A .

B7. Fie Ω cercul de centru O circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC . Punctul M , diferit de O , este situat arbitrar în interiorul triunghiului ABC astfel încât dreptele AM , BM şi CM intersectează cercul Ω în punctele A_1 , B_1 şi, respectiv C_1 . Fie A_2 , B_2 , C_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MBC , MCA şi, respectiv MAB . Demonstraţi că dreptele A_1A_2 , B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente.

B8. Fie date n ($n > 3$) bile de raze diferite. Pe fiecare bilă este scris câte un număr întreg. Să se determine cel mai mare număr natural d cu proprietatea că, oricare ar fi numerele scrise pe bile, oricând se pot găsi cel puţin patru moduri diferite de a selecta un set nevid de bile astfel încât suma numerelor de pe bilele selectate să se dividă cu d .

Timp alocat - 4,5 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинев, 26 марта 2016 года

Второй отборочный тур для БМО 2016 и ММО 2016

В5. Пусть задана рекуррентная последовательность многочленов $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}P_1(X) &= 2X, \quad P_2(X) = 2 \cdot (X^2 + 1), \\P_{n+2}(X) &= 2X \cdot P_{n+1}(X) - (X^2 - 1) \cdot P_n(X),\end{aligned}$$

для любого $n \in \mathbb{N}^*$. Найдите все значения $n \in \mathbb{N}^*$ для которых многочлен $X^2 + 1$ делит многочлен $P_n(X)$.

В6. Пусть $n \in \mathbb{N}^*$. Множество A содержит все натуральные числа, записанные в десятичной системе исчисления и удовлетворяющие одновременно условиям:

- а) каждый элемент множества A имеет n цифр;
- б) каждый элемент множества A делится на 3;
- с) каждый элемент множества A записан только цифрами из множества $X = \{3, 5, 7, 9\}$.

Найдите число элементов множества A .

В7. Пусть окружность Ω с центром O описана остроугольному треугольнику ABC . Точка M , отличная от O , расположена произвольно внутри треугольника ABC так, что прямые AM , BM и CM пересекают окружность Ω в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Пусть A_2 , B_2 , C_2 центры описанных окружностей треугольников MBC , MCA и MAB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной и той же точке.

В8. Пусть даны n ($n > 3$) шаров различных радиусов. На каждом шаре написано некоторое целое число. Найти наибольшее натуральное число d со свойством, что при любых написанных на шарах числах всегда найдутся, по крайней мере, четыре различных способа выбора непустого набора шаров так, что сумма чисел на выбранных шарах делится на d .

Время выполнения – 4,5 астрономических часа

Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!