

A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 martie 2015

A treia probă de evaluare pentru OBM2015 şi OIM2015

B9. Determinaţi toate polinoamele cu coeficienţi reali $P(X)$ care satisfac relaţiile:
 $P(2015) = 2025$ şi $P(x) - 10 = \sqrt{P(x^2 + 3)} - 13$ pentru orice $x \geq 0$.

B10. Demonstraţi egalitatea: $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \cdot \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$.

B11. Tangentele la cercul înscris în triunghiul ABC , care sunt duse paralel la laturile lui şi nu coincid cu ele, taie laturile triunghiului în punctele M, N, P, Q, R, S astfel încât $M, S \in (AB)$, $N, P \in (AC)$, $Q, R \in (BC)$. Bisectoarele interioare ale triunghiurilor AMN , BSR şi CPQ , duse din vârfurile A, B şi, respectiv C , au lungimile l_1 , l_2 şi, respectiv, l_3 , iar semiperimetrul triunghiului ABC este egal cu p . Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \geq \frac{81}{p^2}.$$

B12. Fie numerele naturale nenule n şi k , şi mulţimile $X = \{1, 2, \dots, n\}$ şi $Y = \{1, 2, \dots, k\}$. Notăm cu P mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii X . Determinaţi numărul tuturor funcţiilor $f: P \rightarrow Y$, care verifică proprietatea: $f(A \cap B) = \min\{f(A), f(B)\}$ pentru orice $A, B \in P$.

Timp de lucru: 4 ore 30 minute.

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59 – ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 29 марта 2015 года

Третий отборочный тур для БМО2015 и ММО2015

В9. Найдите все многочлены с действительными коэффициентами $P(X)$, удовлетворяющие соотношениям: $P(2015) = 2025$ и $P(x) - 10 = \sqrt{P(x^2 + 3) - 13}$ при любых $x \geq 0$.

В10. Докажите равенство: $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \cdot \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$.

В11. Касательные к вписанной окружности треугольника ABC , проведенные параллельно его сторонам и отличные от них, пересекают стороны треугольника в точки M, N, P, Q, R, S так, что $M, S \in (AB)$, $N, P \in (AC)$, $Q, R \in (BC)$. Внутренние биссектрисы треугольников AMN , BSR и CPQ , проведенные из вершин A, B и C , соответственно, имеют длины l_1, l_2 и l_3 , а полупериметр треугольника ABC равен p . Докажите неравенство:

$$\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \geq \frac{81}{p^2}.$$

В12. Пусть заданы натуральные ненулевые числа n и k , и множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и $Y = \{1, 2, \dots, k\}$. Обозначим через P множество всех подмножеств множества X . Найти количество всех функций $f: P \rightarrow Y$, которые удовлетворяют свойству: $f(A \cap B) = \min \{f(A), f(B)\}$ при любых $A, B \in P$.

Время работы: 4 часа 30 минут

Каждая правильно решенная задача оценивается 7 очками.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!